الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2008

المادة : الرياضيات
الشعب : شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم و التكنولوجيات بمسلكيها
المعامل : 7
مدة الإنجاز : 3 س

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط) :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقطتين $A(0,-1,1)$ و $B(1,-1,0)$ والفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x-4+2=0$

1. بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة (1,0,2) وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$ وتحقق من أن A تنتمي إلى (S) . (1.25 ن)
2. حدد مثلوت إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ وبين أن $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) (1.25 ن)
3. بين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A . (0.5 ن)

التمرين 2 (3 نقط) :

1. حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$ (1ن)
2. نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3-5i$ و $b=3+5i$ و $c=7+3i$. ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z’ لحق النقطة M صورة M’ بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها 4-2i
   - أ- بين أن $z'=z+4-2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T . (0.75 ن)
   - ب- بين أن : $\frac{b-c}{a-c}=2i$. (0.5 ن)
   - ج- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن BC = 2 AC (0.75 ن)

التمرين 3 (3 نقط) :

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس).

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات في الصندوق.
   - أ- احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء. (1ن)
   - ب- بين أن احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل هو : $\frac{16}{21}$ (1ن)
2. نعتبر في هذا السؤال التجربة التالية: نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق . احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء. (1ن)

مسألـــــــة (3 نقط) :

I – لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)x-2\ln x$

1. أ- احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$. (0.5 ن)

ب – بين أن g تناقصية على $]0,2]$ وتزايدية على $[2,+\infty[$ (0.5 ن)

2. استنتج أن $g(x) \succ 0$ لكل من x المجال $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(2) \succ 0$) (0.5 ن)

II –نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - (\ln x)^2$

ليكن (ζ) لمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا. (0.75 ن)

2. أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$. نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$) (0.5 ن)

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (لاحظ أن : $f(x) = x\left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$) (0.75 ن)

ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتج أن المنحنى (ζ) يقبل ، بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته (Δ) . (0.5 ن)

د- بين أن المنحنى (ζ) يوجد تحت المستقيم (Δ) . (0.25 ن)

3. أ- بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ وبين أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$. (0.75 ن)

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f . (0.25 ن)

ج- بين أن $y = x$ هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (ζ) في النقطة التي أفصولها 1. (0.5 ن)

4. بين أن المعادلة تقبل حلا وحيدا $f(x) = 0$ في α وأن $\frac{1}{e} \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$ (نقبل أن $(\ln 2)^2 \prec \frac{1}{2}$) (0.5 ن)

5. أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (ζ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (ζ) ونأخذ $e \approx 2,7$). (1ن)

6. أ- بين أن $H : x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$.

ثم بين أن : $\int_1^e \ln x\, dx = 1$ (0.5 ن)

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ (0.75 ن)

ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (ζ) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما x = 1 و x = e . (0.5 ن)

III - نعتبر المتتالية العددية (u_0) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1. بين أن $1 \le u_n \le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II (3.أ- (0.75 ن)

2. بين أن المتتالية (u_0) تناقصية. (0.5 ن)

3. 3. استنتج أن (u_0) متقاربة ثم حدد نهايتها. (0.75 ن)